MA1 – přednáška 16.11.2020 – 1. část

V minulé přednášce jsme vyšetřovali užití derivace k vyšetřování vlastností funkce:

1) užití derivace „v bodě" (kde funkce má vlastní derivaci):
   a odtud jsme „dostali":
      spojitost funkce v bodě;
      rovnici tečny ke grafu funkce v bodě, kde f má vlastní derivaci, a odtud
      lineární aproximaci funkce v okolí bodu, kde existuje vlastní derivace;
2) derivaci jsme dále užili k vyšetření monotonie funkce (derivaci jsme „brali" už jako funkci) a k vyšetření existence lokálních a globálních extrémů;
3) druhou derivaci funkce jsme užili k nalezení intervalů, kde je funkce konvexní, resp. konkávní, i k nalezení inflexních bodů (pokud je funkce „má");
4) formulovali jsme l'Hospitalovo pravidlo pro výpočet limit neurčitých výrazů „$\frac{0}{0}$" a „$\frac{\infty}{\infty}$" pomocí derivací.

a) A ukažme si další příklady užití l'Hospitalova pravidla:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln(x+1)) = „\infty-\infty" \underset{(i)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} x\left(1-\frac{\ln(x+1)}{x}\right) =$

$= „\infty\left(1-\frac{\infty}{\infty}\right)" \underset{(ii)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(1-\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = „\infty\cdot(1-0)" = \infty$ (AL)

(i) „vytkli" jsme z rozdílu „$\infty-\infty$" to „∞" (asi „větší")

(ii) zde je neurčitý výraz „$\frac{\infty}{\infty}$" a můžeme zkusit „l'Hospitala":

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{x} \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} = „\frac{1}{\infty}" = 0$$

(a pak AL vede už k výsledku)

a) $\underline{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}} = \text{„}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"} \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \overset{(i)}{=}$

$= \text{„}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"} \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$?? (ii)

(i) možná už zde si někdo všimne, že zadaná limita se jen „dostala do jmenovatele (převrácená hodnota) a „nevylepšila" se

(ii) tady už je to zřejmé – l'Hospital „zde tedy nepomůže (další užití pravidla „nemá smysl") – tedy zbývá úprava !

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x} \underset{(x>0)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \underset{AL+VLSF}{=} \text{„}\sqrt{\frac{1}{\infty}+1}\text{"} = \underline{\underline{1}}$$

b) __„Teoretické" důsledky l'Hospitalova pravidla:__

l'Hospitalovo pravidlo lze často hezky „použít k dopočítávání" derivací ve „špatných" bodech, tj. v bodech, kde buď nelze „užít tabulky derivací a pravidel výpočtu derivací", nebo kde byla funkce dodefinována (spojitě):

Z definice $f'_{(\pm)}(a) = \lim\limits_{x\to a(\pm)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = „\frac{0}{0}"$, pokud

je funkce f spojitá v bodě a (±) (tj. $\lim\limits_{x\to a(\pm)} f(x) = f(a)$).

Pak lze „užít" l'Hospitalovo pravidlo (když to jde dle předpokladů věty) a dostaneme:

$$f'_{(\pm)}(a) = \lim_{x\to a(\pm)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to a(\pm)} \frac{f'(x)}{1}$$ (pokud

tato limita existuje). Tedy máme tvrzení:

<u>Věta (o „dopočítávání" derivací).</u>

Nechť (1) f je spojitá v bodě $a\in R$

(2) existuje $\lim\limits_{x\to a(\pm)} f'(x)$,

Pak existuje i $f'_{(\pm)}(a) = \lim\limits_{x\to a(\pm)} f'(x)$.

<u>(Důkaz – viz „nahoře")</u>

(Užití této věty občas vede k jednodušším výpočtům derivací ve špatných bodech.)

<u>Příklad 1:</u> <u>$f(x) = \cos\sqrt{x}$</u>, $a=0$ (viz přednáška 9.11.)

$D_f = \langle 0,+\infty)$, $f'(x) = -\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$ v $(0,+\infty)$;

f je spojitá v bodě $0+$, lze „zkusit"

$$f'(0+) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2},$$

neboť $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{t\to 0+}\frac{\sin t}{t} = 1$ $(\sqrt{x}=t)$

Příklad 2 (opět přednáška 9.11.) : $f(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)}$:

$\mathcal{D}f = \mathbb{R}$, f je spojitá v $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+1)}} \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{\ln(x^2+1)}}, \text{ pro } x \neq 0$$

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0\pm} f'(x) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{x}{\sqrt{\ln(x^2+1)}} = \pm 1$$

a dostali jsme se ke stejné limitě (4.11.) jako u výpočtu $f'(0)$ z definice – byla to

$$\lim_{x\to 0\pm} \frac{\sqrt{\ln(x^2+1)}}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \underbrace{\sqrt{\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}}}_{\to 1 \text{ („takové" + VLSF)}} \cdot \operatorname{sgn} x = \pm 1$$

Příklad 3 – viz opět 9.11. : $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) f je definovaná i spojitá v $\mathbb{R}$ (v $a=0$ – naši tu „skákání")

2) $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

3) 4.11. jsme spočítali $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

(není nic o skákáních)

A zde pozor!! $f'(0) = 0$ – existuje, ale

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$ neexistuje!

($\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} = 0$, ale fce $\cos\frac{1}{x}$ v bodě $\underline{\underline{0}}$ limitu nemá!!)

! Větu o dopočítávání derivací nemůžeme „obrátit"

Příklad 4 (*) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$; $D_f = \mathbb{R}$

1) $D_f = R$, neboť $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$; tj. $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ pro $x \in R$:

($\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1 \iff |2x| \leq 1+x^2$, ale toto platí:

pro $x \geq 0$: $2x \leq 1+x^2 \iff 0 \leq (1-2x+x^2) \iff$

$0 \leq (1-x)^2$

a pro $x<0$: $-2x \leq 1+x^2 \iff 0 \leq (1+x)^2$)

2) Když „počítáme" $f'(x)$, je problém pro $x = \pm 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}_{\neq 0 \iff x \neq \pm 1 \ !}} \cdot \frac{2\left[1+x^2 - x \cdot 2x\right]}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \text{(krácení } (1+x^2)) \ (\text{a } 1-2x^2+x^4 = (1-x^2)^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)} = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} \cdot \operatorname{sgn}(1-x^2) \quad \text{pro } x \neq \pm 1$$

A nyní můžeme užít větu „o dopočítávané" derivaci:

1) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ je spojitá v bodech $a=1, a=-1$;

2) limity $\lim\limits_{x \to 1\pm} f'(x)$ existují a $\lim\limits_{x\to 1\pm} f'(x) = \mp 1$,

existují i limity $\lim\limits_{x\to -1\pm} f'(x) = \pm 1$, tedy, dle věty,

existují i jednostranné derivace $f'_{\pm}(1) = \mp 1$, $f'_{\pm}(-1) = \pm 1$

(tj. funkce $f(x)$ nemá derivaci oboustrannou v bodech

$a = \pm 1$ – na grafu jsou „špičky" v bodech $a = \pm 1$).

<u>A pro úplnost</u> – výpočet limit $\lim\limits_{x\to 1\pm} f'(x)$ ($\lim\limits_{x\to -1\pm} f'(x)$ analogicky)

$$\lim_{x\to 1+} f'(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{2}{1+x^2} \cdot \underset{(=-1)}{\operatorname{sgn}(1-x^2)} = \lim_{x\to 1+} \frac{-2}{1+x^2} = -1$$

$$(\operatorname{sgn}(1-x^2) = -1 \text{ pro } x > 1)$$

a

$$\lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{2}{1+x^2} \underset{(=1)}{\operatorname{sgn}(1-x^2)} = \lim_{x\to 1-} \frac{2}{1+x^2} = 1$$

$$(\operatorname{sgn}(1-x^2) = 1 \text{ pro } x \in (-1, 1))$$

Vyšetření průběhu funkce – shrnutí („návod") a příklady

„Návod":

1) Df, základní vlastnosti fce f (znaménko; nulové body; f(0), pokud $0 \in Df$; lichost, sudost, periodicita)
spojitost funkce

2) limity funkce (v krajních bodech intervalů z Df),
asymptoty grafu (tj. přímky, ke kterým se graf f „blíží"): a) je-li $\lim\limits_{x \to +\infty \,(-\infty)} f(x) = L \in R$, pak je to přímka „vodorovná" $y = L$

b) je-li $\lim\limits_{x \to a(\pm)} f(x) = +\infty \,(-)$, pak je to přímka „svislá": $x = a$

c) a „šikmá" asymptota $y = ax + b$, v ($\pm\infty$), když
$\lim\limits_{x \to +\infty\,(-)} (f(x) - (ax+b)) = 0$

a odtud lze udělat „odhad" grafu funkce

3) vypočět $f'(x)$ a odtud intervaly, kde je funkce rostoucí, resp. klesající, nalezení lokálních, resp. globálních extrémů, existují-li (lépe vyšetření existence lokálních, resp. globálních extrémů)

4) $f''(x)$ a odtud intervaly, kde je funkce konvexní, resp. konkávní, vyšetření existence inflexních bodů

5) „náčrtek" grafu funkce

Příklady:

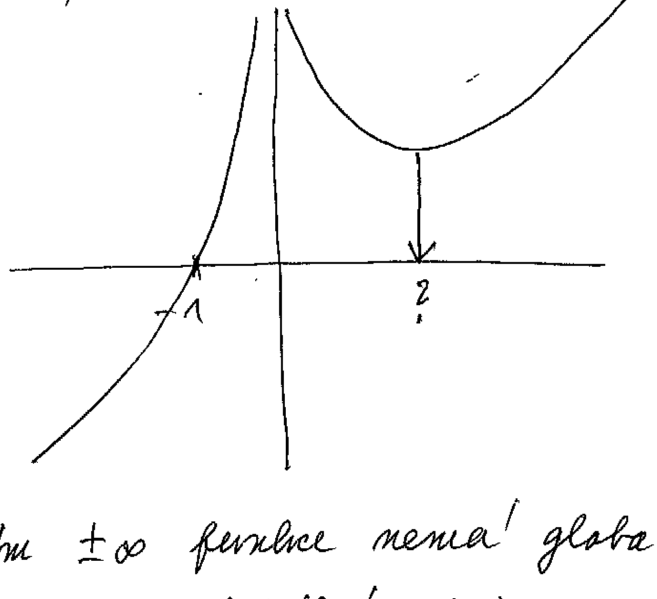
1. Jednoduchý (na začátek): $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

1) $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ $\left(f(x) = \frac{x^3+1}{x^2} \right)$;
$f(x) > 0$ v $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ v $(-\infty, -1)$

2) f je spojitá v D_f (tj. v každém bodě $x \in D_f$)
$\lim\limits_{x \to 0} \left(x + \frac{1}{x^2} \right) =$ „$0 + \frac{1}{0+}$" $= +\infty$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x + \frac{1}{x^2} \right) =$ „$\pm\infty + \frac{1}{\infty}$" $= \pm\infty$;

tj. osa y (tj. $x = 0$) je svislá asymptota
pro $x \to \pm\infty$ je $\frac{1}{x^2} \sim 0$, tj. asi bude i šikmá asymptota – na tomto příkladu si vysvětlíme (na konci) a zobecníme pak, jak najít šikmou asymptotu (a kdy „asi" existují)

odhad grafu:



díky limitám $\pm\infty$ funkce nemá globální extrémy, v $(0, +\infty)$ bude ale lokální minimum (> 0);
též přibližný odhad „prohnutí" grafu;

3) <u>vyšetření $f'(x)$</u>: $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3-2}{x^3}$

$$f'(x)=0 \iff x = \sqrt[3]{2}$$

Tedy máme:

		0		$\sqrt[3]{2}$	
f'	$+$		$-$		$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

v intervalu $(-\infty,0)$ je $f'(x)>0 \Rightarrow f$ roste v $(-\infty,0)$

v $(0,\sqrt[3]{2})$ je $f'(x)<0 \Rightarrow f$ klesá v $(0,\sqrt[3]{2}\rangle$

v $(\sqrt[3]{2},+\infty)$ je $f'(x)>0 \Rightarrow f$ roste v $\langle\sqrt[3]{2},+\infty)$

tedy, dále, v bodě $x = \sqrt[3]{2}$ má f ostré lokální minimum
$\left(f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \right)$

4) <u>$f''(x) = \frac{6}{x^4}$ v D_f</u>,

$f''(x)>0$ v $(-\infty,0)$ i v $(0,+\infty) \Rightarrow f$ je konvexní
v intervalu $(-\infty,0)$ i v intervalu $(0,+\infty)$
(f nemá inflexní body)

5) <u>a ještě slíbené vyšetření šikmé asymptoty v $+\infty$ $(-\infty)$</u>

a) šikmou asymptotu může „funkce mít, pokud v $+\infty$ $(-\infty)$ má" nevlastní limitu

b) „asi" fce „musí" jít do $+\infty$ $(-\infty)$ rychle jako $\underline{\underline{x}}$?

c) Jak toto zjistíme? – má-li být asymptotou přímka s rovnicí $y = ax+b$, pak musí být (graf a přímka se „přibližují" pro $x \to (\pm)\infty$)

$$\lim_{x \to (\pm)\infty} \left(f(x) - (ax+b) \right) = 0$$

(limita typu $\infty - \infty$ $(a \neq 0)$)

zkusme: $0 = \lim\limits_{x \to (\pm)\infty} (f(x) - ax - b) = \lim\limits_{x \to (\pm)\infty} x \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) =$

$$\underset{\text{nutně}}{=} \text{„}\ \infty \cdot 0\ \text{"}$$

tj. $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ (-\infty)}} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = 0$, ale $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (-)}} \frac{b}{x} = 0$, tj.

„musí" být (1) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ (-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = a$. Potom má

(2) $b = \lim\limits_{x \to (\pm)\infty} (f(x) - ax)$ (pokud existuje)

Obráceně lze dokázat, že když existují limity (1), (2), graf f má v $+\infty$ $(-\infty)$ asymptotu $y = ax+b$.

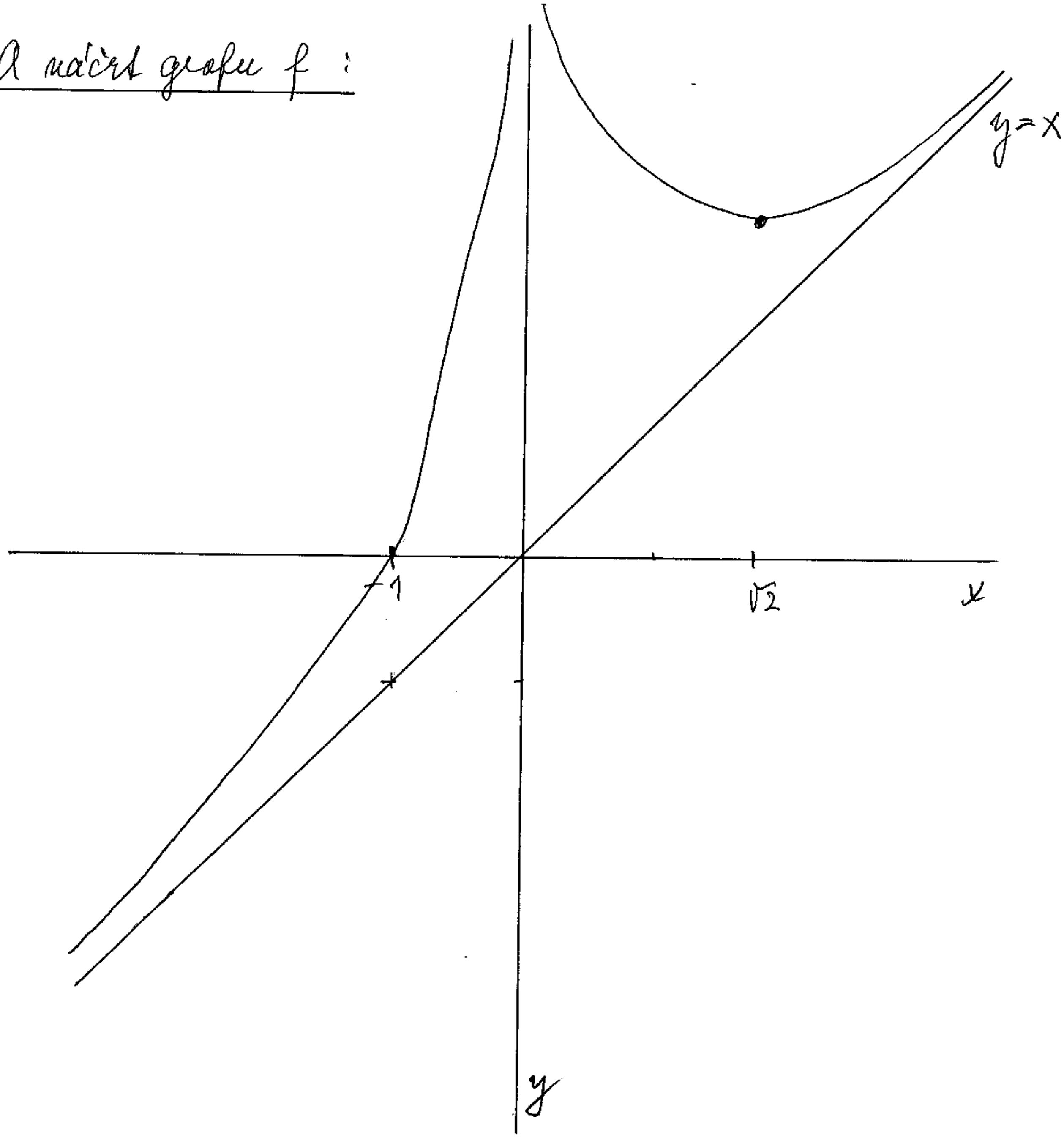
Tedy zde: $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

a (1) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) = 1$

(2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x + \frac{1}{x^2} - 1 \cdot x \right) = 0$

tj. přímka $y = x$ je asymptota grafu f v $+\infty$ i v $-\infty$.

A náčrt grafu f :



2. příklad : $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ – viz soubor ve „dubu"
„průběhy funkcí řešené"
(a posílám)

2. Příklad: $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$. (vyšetření asymptot – celý průběh je mezi vyřešenými příklady z průběhu funkcí na „dubu")

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{(x-2)^2} = „\dfrac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^2}(1-\frac{2}{x})^2} =$

$= \pm\infty$ (a zároveň „vidíme", že $f(x) \sim x$ v $\pm\infty$, tedy je „naděje" na šikmou asymptotu)

2) $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^3}{(x-2)^2} - x\right) = „\infty - \infty" =$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3 - x(x-2)^2}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \dfrac{\infty}{\infty} =$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2\left(4 - \frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2} = 4,$

tedy, daná funkce má asymptotu v „$+\infty$" i v „$-\infty$" o rovnici $y = x + 4$.

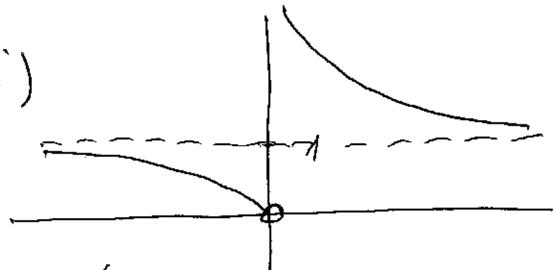
<u>3. příklad:</u> $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ (zkoumali jsme odhad grafu této funkce na začátku limit)

1) $D_f = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, f je spojitá v D_f, $f(x)>0$ v D_f

2) $$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{y\to 0} e^{y} = e^{0} = 1$$

$$\lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} e^{y} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0$$

odhad grafu (už před limitami)



zde máme: $y=1$ – vodorovná asymptota v $\pm\infty$

$x=0$ – svislá asymptota (pro $x\to 0+$)

3) <u>monotonie fce</u>:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}},$$

$f'(x)<0$ v $(-\infty,0)$ i v $(0,+\infty)$ $\Rightarrow$ f je klesající funkce v $(-\infty,0)$ i v $(0,+\infty)$

f nemá ani globální extrémy ($\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=0$)

ani lokální extrémy (f je ryze monotonní v každém z intervalů $(-\infty,0)$ a $(0,+\infty)$)

4) $\underline{f''(x)} = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^4}\,(1+2x)$

a tedy $f''(x)=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, a vyšetření $f''(x)$:

f''	$-$		$+$		$+$
	$\cap$	$-\frac{1}{2}$	$\cup$	0	$\cup$

a tedy: $f''(x) < 0$ v $(-\infty, -\frac{1}{2}) \Rightarrow f$ je konkávní v $(-\infty, -\frac{1}{2})$

$f''(x) > 0$ v $(-\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow f$ je konvexní v $(-\frac{1}{2}, 0)$

$f''(x) > 0$ v $(0, +\infty) \Rightarrow f$ je konvexní v $(0, +\infty)$,

a odtud: f má inflexi v bodě $x = -\frac{1}{2}$

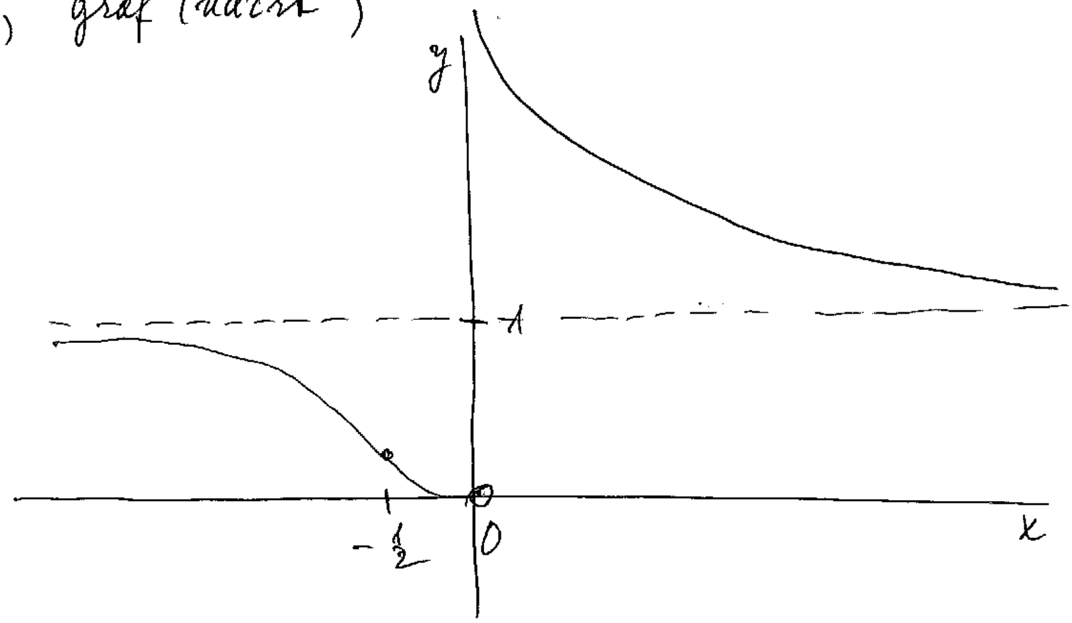
(inflexní bod $[-\frac{1}{2}, e^{-2}]$

5) a pod grafem ještě zajímavost –

$$\lim_{x \to 0-} f'(x) = \lim_{x \to 0-} \left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right) \underset{\substack{\text{VLSF} \\ (-\frac{1}{x} = t)}}{=} \lim_{t \to +\infty} \left(-t^2 \cdot e^{-t}\right) = \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{t^2}{e^t}\right) = 0$$

(l'Hosp. 2×)

6) graf (náčrt)



<u>4. příklad</u> $\underline{f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$ (stručněji)

1) $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, $H_f \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, $f(x) > 0$ pro $\frac{x+1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

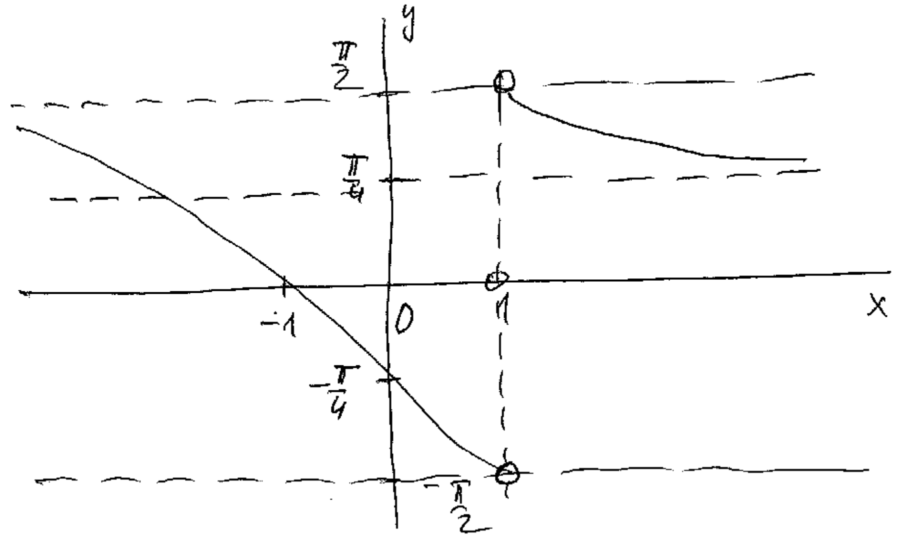
$f(x) < 0$ v $(-1, 1)$

f je spojitá v D_f, $f(0) = -\frac{\pi}{4}$ $(= \operatorname{arctg}(-1))$

2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{y \to 1} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{x \to 1\pm} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{y \to \pm\infty} \operatorname{arctg} y = \pm\frac{\pi}{2}$

<u>Odhad grafu</u>



3) <u>monotonie funkce</u> (složené rostoucí a klesající funkce – vidíme, ale „spočítáme" z f')

v D_f: $f'(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2 + (x+1)^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

(zajímavé – $\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)' = (-\operatorname{arctg} x)'$ v D_f !)

a odtud: $f'(x) < 0$ v $(-\infty, 1)$ i v $(1, +\infty)$ $\Rightarrow$
f je klesající v $(-\infty, 1)$ i v $(1, +\infty)$
tedy nemá lokální extrémy, ale ani globální
(limit pro $x \to 1\pm$ $\left(= \pm \frac{\pi}{2}\right)$ nenabývá)

4) $f''(x) = \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

f''	$-$	0	$+$	1	$+$
	$\cap$		$\cup$		$\cup$

tj.: v $(-\infty, 0)$ je f konkávní,
v $(0, 1)$ je f konvexní
$\Rightarrow$ v bodě $x = 0$ má f inflexi

v $(1, +\infty)$ je f konvexní
$f'(0) = -1$ [směrnice tečny v $[0, -\frac{\pi}{4}]$]

asymptoty grafu: $y = \frac{\pi}{4}$ v $\pm\infty$

graf (upřesněný) – nákres